

归一化参数蠕变模型的程序实现与验证

程域钊^{1,2}, 王延荣^{1,2}, 李宏新¹, 田爱梅³

- (1. 北京航空航天大学 能源与动力工程学院, 北京 100191;
2. 先进航空发动机协同创新中心, 北京 100191;
3. 北京航空航天大学 宇航学院, 北京 100191)

摘 要: 为了准确模拟实际构件的蠕变行为和应力松弛效应,在通有限元程序环境下,利用其提供的用户可编程特性工具,将所发展的一种能完整描述蠕变3个阶段变形特征的归一化参数模型编制成用户子程序.考查了子程序计算结果与试验数据的差异、时间步长对计算结果的影响,并对不同规模有限元模型的计算耗时作了对比分析.针对变载(应力、温度)情形,在子程序中实现了时间硬化理论和应变硬化理论,并提出的介于两者之间的相对时间硬化理论.对带孔平板进行了实例计算,表明所发展的模型能够与有限元结果对实际结构进行蠕变模拟,计算结果的规律说明所发展的方法可较好地模拟实际构件的蠕变行为和应力松弛效应,验证了子程序的有效性.

关 键 词: 蠕变行为; 应力松弛; 蠕变第3阶段; 归一化参数蠕变模型; 用户子程序

中图分类号: V231

文献标志码: A

Implementation and validation of creep model based on normalized parameters

CHENG Yu-zhao^{1,2}, WANG Yan-rong^{1,2}, LI Hong-xin¹, TIAN Ai-mei³

- (1. School of Energy and Power Engineering,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China;
2. Collaborative Innovation Center for Advanced Aero-Engine, Beijing 100191, China;
3. School of Astronautics,
Beijing University of Aeronautics and Astronautics, Beijing 100191, China)

Abstract: In order to numerically simulate creep behaviors and stress relaxation effects of realistic structural components under operating conditions in service, a model based on normalized parameters, which can be used to describe all the features of creep deformation in three stages, was presented and coded into a user's subroutine under the platform of a commercial finite element package by use of its user programmable features tools. The difference between the numerical results from the coded subroutine and the experimental data, and the effect of time step on numerical results, was investigated. The computer's time consuming for solution of finite element models in different scale was compared and analyzed. For a loading case with stress and/or temperature changing, the time hardening theory and the

收稿日期: 2015-07-06

基金项目: 国家自然科学基金(51475022, 50571004)

作者简介: 程域钊(1990—),男,硕士生,主要从事航空发动机结构设计与强度分析.

引用格式: 程域钊,王延荣,李宏新,等.归一化参数蠕变模型的程序实现与验证[J].航空动力学报,2017,32(3):697-703. CHENG Yuzhao, WANG Yanrong, LI Hongxin, et al. Implementation and validation of creep model based on normalized parameters[J]. Journal of Aerospace Power, 2017, 32(3): 697-703.

strain hardening theory, as well as the relative time hardening theory presented with its result between those of them, were implemented in the coded subroutine. Numerical results of a plate with a hole show that the coded subroutine can be used to simulate the creep behaviors and effects of stress relaxation in realistic structural components, and that the feasibility and effectiveness of the coded subroutine are validated.

Key words: creep behavior; stress relaxation; the third stage of creep; creep model based on normalized parameters; user's subroutine

随着航空发动机技术的发展,涡轮前温度进一步提高,因蠕变导致的高温结构失效问题日益突出.蠕变常使结构件的塑性变形过大,乃至产生蠕变应力断裂^[1-2].因此,预测进而限制蠕变变形对航空发动机高温结构设计有工程实际意义.

蠕变建模是蠕变研究中一个重要方面,准确描述蠕变行为是实际结构蠕变分析所必需.当前工程中常用的蠕变模型大多只能计及前 2 个阶段的蠕变变形,如应变硬化模型和时间硬化模型等.随着高温结构设计需求和水平的提高,只计及前 2 个阶段的蠕变变形已不能满足研制要求. Evans 和 Wilshire 发展的 θ 投射法^[3]虽然可以模拟完整的蠕变变形,但其并不注重描述稳态蠕变阶段. Prager^[4]提出了一种只能描述蠕变第 3 阶段的 Omega 方法,主要用于预测持久寿命. 本文以一种基于归一化参数的蠕变模型为基础,使其能应用于实际结构计算,该模型具有完整描述蠕变 3 个阶段变形的能力.

对实际构件的蠕变行为进行数值模拟是工程研制所必需,也是蠕变研究中一个重点. 文献[5-6]利用通用有限元程序对实际结构件(如轮盘榫槽、叶片等)进行了蠕变分析,但未分析蠕变第 3 阶段的行为. 文献[7-10]通过引入损伤参量对蠕变模型进行改进,或采用 θ 投射法^[11-12],在通用有限元程序中通过编写子程序,实现对试样的蠕变 3 个阶段变形的模拟. 由于所用模型模拟蠕变变形的能力不足,其计算分析精度尚有待提高. 一些黏塑性本构模型^[13-15]虽能较好地描述循环载荷下的塑性变形,而在描述第 3 阶段蠕变方面也须引入损伤参量对模型进行修正,且计算较为复杂,一般不宜用于实际结构的蠕变分析.

在实际构件中,常因形状不规则引起应力集中,造成结构受力不均. 温度相同时,高应力区产生的蠕变应变比低应力区的大,但产生较大变形的区域会受到较小变形区域的限制,由此产生应力重新分布的现象,即应力松弛效应. 文献[16-17]分析了不同材料和不同类型试样的应力

松弛问题,但没有对所用模型是否能准确描述应力松弛效应进行分析.

较为理想的蠕变模型应能准确地描述蠕变前 2 个阶段,因为结构件在使用寿命期内的通常都处于蠕变前 2 个阶段;同时也应具有能够描述第 3 阶段蠕变变形的能力,以便判断结构件是否处于较为危险的加速蠕变阶段. 本文利用所提出能完整描述蠕变 3 个阶段变形的基于归一化参数的蠕变模型,在 ANSYS 程序环境下通过编写 Usercreep 子程序,实现了将该模型用于实际构件的蠕变分析;并进一步改进子程序,使其能适用于载荷(应力、温度)发生变化的情况,以模拟实际构件的蠕变行为.

1 子程序实现与验证

1.1 子程序使用的蠕变模型

本文采用的蠕变模型为一种基于归一化参数的蠕变模型,其将蠕变应变 ϵ_c 表示为

$$\epsilon_c = \eta_1 (1 - e^{-\eta_4 \zeta}) + \eta_2 \zeta + \eta_3 \zeta^{\eta_5} \tag{1}$$

式中 $\zeta = t/t_c$ 为归一化时间, t_c 为给定温度和应力下的持久寿命,则 $\zeta \in [0, 1]$; $\eta_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 为与材料相关的参数,是归一化应力 $\sigma/\sigma_{0.2}$ 与归一化温度 T/T_m 的函数($\sigma_{0.2}$ 和 T_m 分别为屈服应力和熔点温度),可表示为

$$\ln \eta_i = a_i + b_i \frac{T}{T_m} + c_i \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} + d_i \frac{T}{T_m} \cdot \frac{\sigma}{\sigma_{0.2}} \tag{2}$$

式中 η_i 代表 5 个参数($\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$), a_i, b_i, c_i, d_i 为对应于各参数的待定系数,可通过拟合试验数据得到.

式(1)中 3 项分别表示蠕变的 3 个阶段,各项的蠕变率随着时间的变化分别为减小、不变、增大,具有描述 3 个阶段的蠕变变形的能力. 同时由于参数 $\eta_i (i = 1, 2, 3, 4, 5)$ 为温度和应力的函数,因此能够描述任意温度和应力下的蠕变曲线,能够进行内插和外推.

1.2 子程序的实现

通用有限元程序 ANSYS 中的 UPFs (user programmable features) 工具提供了多种用户子程序,用户可根据需要修改子程序以满足不同功能需要,例如创建新单元、定义新的材料属性等,其中,Usercreep 子程序可用来模拟材料的与时间相关的蠕变行为,该子程序在所有单元的所有积分点均被调用.与 Usermat 子程序相比,Usercreep 的使用较为方便,计算速度也较快,且不用在子程序中判断应力状态(平面应力、平面应变等)、材料类型(各向同性、正交各向异性等)、是否进入塑性等,只需在主程序中定义即可.

Usercreep 子程序的输入变量包括等效蠕变应变、等效应力、时间、温度、静水应力,输出变量为蠕变应变增量、蠕变应变增量对等效应力的导数和蠕变应变增量对蠕变应变的导数.

Usercreep 子程序所需的 3 个输出变量可由式(1)得到,具体如下:

蠕变应变增量

$$\dot{\epsilon}_c \Delta t = \frac{1}{t_c} (\eta_1 \eta_4 e^{-\eta_4 \zeta} + \eta_2 + \eta_3 \eta_5 \zeta^{\eta_5-1}) \Delta t \tag{3}$$

蠕变应变增量对等效应力的导数

$$\frac{\partial(\dot{\epsilon}_c \Delta t)}{\partial \sigma} = \frac{1}{t_c} \cdot \frac{1}{\sigma_{0.2}} [\eta_1 \eta_4 e^{-\eta_4 \zeta} (q_1 + q_4 - q_4 \eta_4 \zeta) + q_2 \eta_2 + \eta_3 \eta_5 \zeta^{\eta_5-1} (q_3 + q_5 + q_5 \eta_5 \ln \zeta)] \Delta t \tag{4}$$

式中 $q_i = c_i + d_i \frac{T}{T_m}$ ($i=1,2,3,4,5$).

蠕变应变增量对蠕变应变的导数

$$\frac{\partial(\dot{\epsilon}_c \Delta t)}{\partial \epsilon_c} = \frac{d\dot{\epsilon}_c}{dt} \cdot \left[\frac{1}{\frac{d\epsilon_c}{dt}} \right] \Delta t = \frac{-\eta_1 \eta_4^2 e^{-\eta_4 \zeta} + \eta_3 \eta_5 (\eta_5 - 1) \zeta^{\eta_5-2}}{t_c (\eta_1 \eta_4 e^{-\eta_4 \zeta} + \eta_2 + \eta_3 \eta_5 \zeta^{\eta_5-1})} \Delta t \tag{5}$$

由于屈服应力随温度变化而变化,这里用线性关系表示屈服应力随归一化温度的变化(当然,也可以采用更一般的形式 $\sigma_{0.2} = f(T)$)

$$\sigma_{0.2} = f_1 + f_2 \frac{T}{T_m} \tag{6}$$

持久寿命也是随应力和温度的变化而变化,这里采用持久寿命方程(L-M 方程)将持久断裂寿命表示为应力和温度的函数

$$\lg t_c = g_1 + g_2 \frac{1}{T} + g_3 \frac{x}{T} + g_4 \frac{x^2}{T} + g_5 \frac{x^3}{T} \tag{7}$$

式中 $x = \lg \sigma$, $T = 9\theta/5 + 492$, T 为开氏温度, θ 为摄氏温度.式(6)、式(7)中 f_1, f_2 , 及 $g_1, g_2, \dots, g_5$ 均为待定常数,可通过材料数据拟合得到.

可按式(3)~式(7)编写 Usercreep 子程序,通过编译连接,将该模型用于实际构件的蠕变计算分析.下面对所编制的 Usercreep 子程序进行考核验证.

1.3 子程序的考核验证

通用有限元程序 ANSYS 中提供了可用于蠕变分析的应变硬化模型,本文先按应变硬化模型编写用户子程序 Usercreep,通过所编子程序和非子程序(ANSYS 自带模型)的分析结果对比,判断子程序结果是否正确.同时由于归一化参数模型能描述 3 个阶段的蠕变变形,通过参数拟合,使应变硬化模型的蠕变曲线和归一化参数模型的蠕变曲线的前 2 个阶段尽可能相近,以说明归一化参数模型的子程序描述前 2 个阶段的正确性,同时具有描述第 3 阶段蠕变的能力.

应变硬化模型表达式为

$$\dot{\epsilon}_c = A \sigma^n \epsilon_c^m e^{-Q/RT} \tag{8}$$

式中 $A, n, m, Q/R$ 均为材料常数.

对于应变硬化模型,Usercreep 子程序所需的 3 个输出变量为:蠕变应变增量 $A \sigma^n \epsilon_c^m e^{-Q/RT} \Delta t$,蠕变应变增量对等效应力的导数 $An \sigma^{n-1} \epsilon_c^m \cdot e^{-Q/RT} \Delta t$,蠕变应变增量对蠕变应变的导数 $Am \cdot \sigma^n \epsilon_c^{m-1} e^{-Q/RT} \Delta t$.

用于 Usercreep 子程序考核计算的长方体有限元模型如图 1 所示,其中边长分别为 5 mm×4 mm×3 mm,单元类型为八节点六面体单元(即 ANSYS 中的 solid185 号单元),在 $x=0, y=0, z=0$ 的面上分别约束各节点的 x, y, z 方向的位移,在 $x=5, y=4$ 的面上分别施加 700, 100 MPa 的应力.应变硬化模型中的参数值为: $A=4.82 \times 10^{-11}$, $n=1.003\ 569$, $m=-2.069\ 2$, $Q/R=991.973\ 1$.归一化参数模型的各参数计算的蠕变曲线与应变硬化模型前 2 个阶段接近.计算得到的应变硬化模型(子程序与非子程序)和归一化参数模型的等效蠕变应变如图 2 所示.

由图 2 中可以看出,对于应变硬化模型,用子程序计算得到的结果和不用子程序的计算结果一致.应变硬化模型与归一化参数模型的计算结果的前 2 个阶段基本重合,说明用归一化参数模型的子程序计算蠕变前 2 个阶段的变形较为准确,同时归一化参数模型具有模拟蠕变第 3 阶段的能

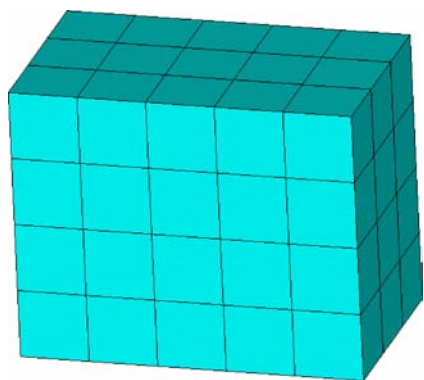


图 1 用于子程序验证的有限元模型

Fig. 1 Finite element model for validation of the subroutine

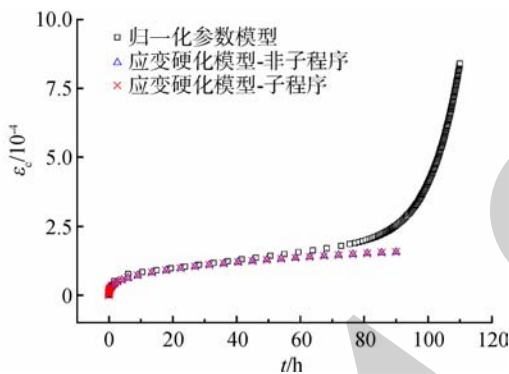


图 2 子程序和非子程序分析结果的对比

Fig. 2 Comparison of results between subroutine and non-subroutine

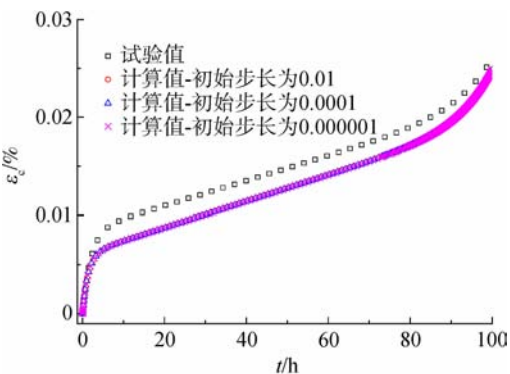
力,用子程序计算蠕变变形是可行的.

2 子程序计算精度及时间的对比分析

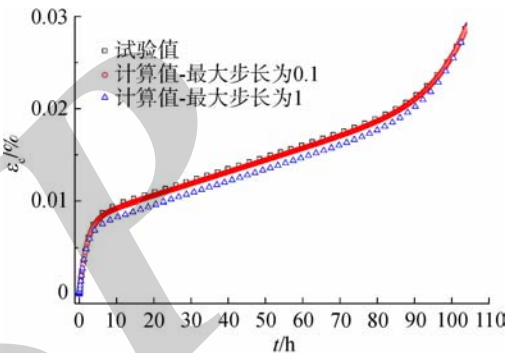
2.1 时间步长对计算精度的影响

首先考查时间步长对计算精度的影响. 考查计算所用的有限元模型如图 1 所示,载荷与边界条件同前,其中采用归一化蠕变模型,计算过程中控制初始步长与最大步长,并开启自动时间步选项,计算结果如图 3 所示.

图 3(a)为最大步长为 1,初始步长分别为 0.01,0.0001,0.000001 的计算结果,可看到初始步长的大小对计算精度影响不大. 即使采用不同的初始步长,通过自动时间步的调整,程序在计算过程中经过较短的时间后就以最大步长 1 开始递增. 图 3(b)给出具有相同初始步长为 0.001,最大步长分别为 0.1 和 1 的计算结果,可看到最大步长为 0.1 的精度较最大步长为 1 的有大幅提高,与试验值非常接近.



(a) 最大步长为1,不同初始步长



(b) 不同最大步长,初始步长为0.001

图 3 时间步长对计算精度的影响

Fig. 3 Effects of time step on computational accuracy

2.2 计算时间

建立不同网格数的有限元模型,以分析所编制的子程序计算所需时间的长短. 所建几何模型为长方体,尺寸与边界条件同第 1.3 节,不同的是在长方体模型的每条边上均匀划分网格,建立 3 个有限元模型(L_n, W_n, H_n 分别表示实体模型长、宽、高各边上的单元数)

- 1) $L_n \times W_n \times H_n = 5 \times 4 \times 3 = 60$;
- 2) $L_n \times W_n \times H_n = 30 \times 20 \times 10 = 6\,000$;
- 3) $L_n \times W_n \times H_n = 50 \times 40 \times 20 = 40\,000$.

由不同单元数的有限元模型计算得到的蠕变曲线和图 2 一致,计算所需时间见表 1(计算机的配置为:CPU 主频为 3.2 GHz,4 核,内存为 8 GB).

对于归一化参数模型,由于存在蠕变第 3 阶段,蠕变应变率较大,为保证程序收敛,计算蠕变第 3 阶段时步长须较小,因此在计算前 2 个阶段蠕变变形耗时较少,而第 3 阶段计算耗时所占比例很大. 在相对较短的时间之内就能计算到蠕变第 3 阶段,说明用该方法计算实际结构蠕变变形的有效性.

表 1 不同单元数的模型的计算时间对比

Table 1 Comparison of computing time of models with different element numbers

模型	单元数	最大子步	总子步数	耗时/min	
				前 2 个阶段	第 3 阶段
应变硬化模型 (非子程序)	60	4.5	97	<1	
	6000	4.5	97	3	
	40000	1	1637	27	
应变硬化模型 (子程序)	60	4.5	97	<1	
	6000	4.5	97	3	
	40000	1	1637	30	
归一化参数模型	60	4.5	97	<1	
	6000	4.5	97	10	
	40000	1	1637	78	

3 变载条件下的蠕变行为

当应力、温度在 t 时刻由 (σ_1, T_1) 变化为 (σ_2, T_2) , 蠕变应变将按 (σ_2, T_2) 状态下的 t 时刻后蠕变应变曲线变化, 即在 t 时刻后将 (σ_2, T_2) 状态下 t 时刻之后的曲线沿纵向平移得到, 称其为时间硬化理论, 如图 4(a) 所示. 若 t 时刻之后的蠕变曲线由 (σ_2, T_2) 状态和 (σ_1, T_1) 状态下产生相同应变所对应时间之后的曲线沿水平平移得到, 则称之为应变硬化理论, 如图 4(b) 所示.

除了时间硬化和应变硬化理论外, 本文在子程序中还实现所发展的一种可称为相对时间硬化的理论, 如图 4(c) 所示, 令 $\zeta = \frac{t}{t_{c,1}} = \frac{t_2}{t_{c,2}}$, $t_{c,1}$ 和 $t_{c,2}$ 分别表示 (σ_1, T_1) 和 (σ_2, T_2) 状态下的持久寿命, 变载后的蠕变曲线则由 (σ_2, T_2) 状态下在 t_2 时刻之后的蠕变曲线平移得到, 相当于在时间归一化坐标中的时间硬化理论.

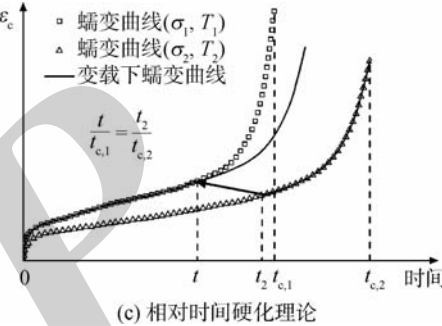
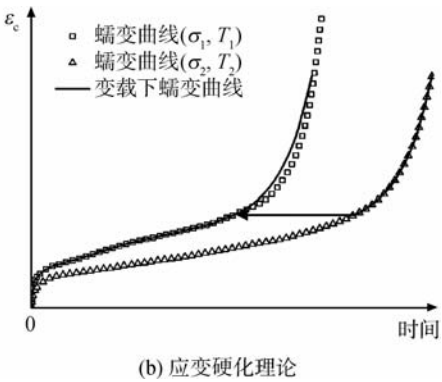
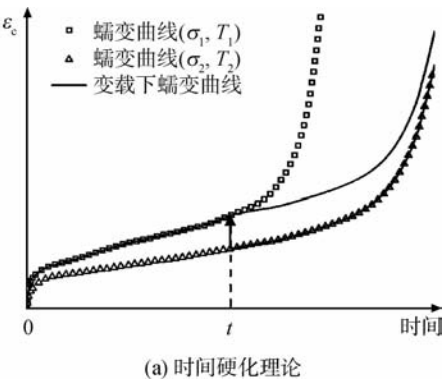


图 4 不同的变载理论

Fig. 4 Different variable loading theories

在子程序中, 由 $t_2 = \zeta t_{c,2}$ 可计算得到相对时间硬化理论中的 t_2 ; 通过主程序返回的应变值 ϵ_c , 由归一化参数模型的表达式迭代求得 (σ_2, T_2) 状态下蠕变应变 ϵ_c 的对应的时间 t'_2 . 分别用 t_2 和 t'_2 替换 Usercreep 子程序中输出变量 t , 即可实现相对时间硬化理论和应变硬化理论的子程序的编制, 程序运行结果如图 4 所示.

4 应力松弛效应分析

建立带孔平板右侧的有限元模型, 如图 5 所示, 下端限制 y 方向位移, 上端施加 200 MPa 拉应力. 应力松弛效应属于变载条件下的蠕变行为, 可通过所编制的 Usercreep 子程序进行计算分析. 现分别用时间硬化理论、应变硬化理论和相对时间硬化理论对带孔平板的应力松弛效应进行分析. 考查图 5 中 P_a, P_b 两点 y 方向的应力 (σ_y) 变化, 如图 6 所示.

由图 6 可以看到, 随着时间的增加, 各点的应力逐渐变化, 高应力区的 P_a, P_b 两点应力下降显著, 表明该子程序能够模拟应力松弛效应, 其中相对时间硬化理论和应变硬化理论的计算结果相近, 而时间硬化理论的应力变化较快.

文献[18]中指出: 一般情况下, 与时间硬化理论相比, 由应变硬化理论得到的预测结果与试验

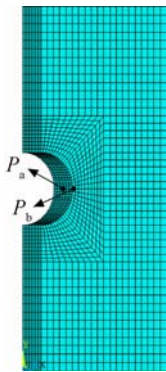
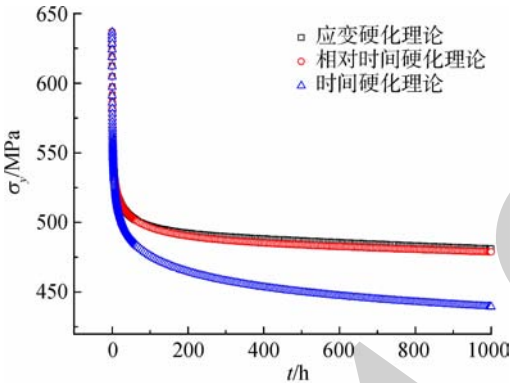
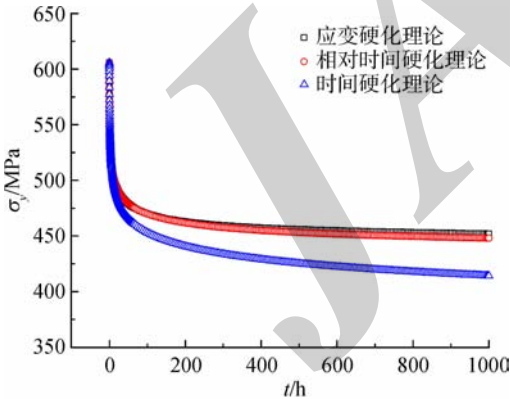


图 5 带孔平板的有限元模型

Fig. 5 Finite element model for plate with the hole



(a) P_a 点应力变化



(b) P_b 点应力变化

图 6 带孔平板各点处的应力随时间的变化

Fig. 6 Stress of different points in plate with the hole varying with time

提高,本文的相对时间硬化理论结果介于时间硬化理论与应变硬化理论之间,但更接近后者。

5 结 论

本文将归一化参数蠕变模型在通用有限元程序 ANSYS 中利用 Usercreep 子程序接口进行了程序实现和验证,结果表明可用于模拟实际结构的蠕变变形(能模拟蠕变第 3 阶段)和应力松弛效应。通过考查子程序计算的准确性、时间步长对精度的影响以及计算耗时,验证了子程序的可行性和有效性;同时,针对变载条件,提出了相对时间硬化理论,并与时间硬化理论和应变硬化理论作了对比,子程序实现的结果表明能对实际结构的应力松弛效应进行数值模拟,且计算实例表明可用相对时间硬化理论替代应变硬化理论用于实际结构的蠕变分析。

参考文献:

[1] 穆霞英. 蠕变力学[M]. 西安:西安交通大学出版社,1990.

[2] 张俊善. 材料的高温变形与断裂[M]. 北京:科学出版社,2007.

[3] Evans R W, Wilshire B. Creep of metals and alloys[M]. London:the Institute of Metals,1985.

[4] Prager M. Development of the MPC omega method for life assessment in the creep range[J]. Journal of Pressure Vessel Technology,1995,117(2):95-103.

[5] Maharaj C, Morris A, Dear J P. Modelling of creep in inconel 706 turbine disc fir-tree[J]. Materials Science and Engineering: A,2012,558(1):412-421.

[6] 饶寿期,吴斌,孟春玲. 单晶涡轮叶片的蠕变计算分析[J]. 燃气涡轮试验与研究,1998,11(4):30-33.

RAO Shouqi, WU Bin, MENG Chunling. Creep analysis of single crystal turbine blade[J]. Gas Turbine Experiment and Research,1998,11(4):30-33. (in Chinese)

[7] 石多奇,杨晓光. 时间硬化蠕变本构方程耦合损伤的应用研究[J]. 航空动力学报,2004,19(1):12-16.

SHI Duoqi, YANG Xiaoguang. Application of the time-hardening creeo law coupling damage[J]. Journal of Aerospace Power,2004,19(1):12-16. (in Chinese)

[8] Hyde T H, Becker A A, Sun W, et al. Finite-element creep damage analyses of P91 pipes[J]. International Journal of Pressure Vessels and Piping,2006,83(11):853-863.

[9] Yue Z F, Lu Z Z. Finite element creep damage study of nickel base single crystal structures under multiaxial stress states[J]. Materials Science and Technology,2003,19(8):1012-1016.

[10] Kostenko Y, Lvov G, Gorash E, et al. Power plant component design using creep-damage analysis[C]//Proceedings of ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition. Chicago, USA: American Society of Me-

结果符合较好. 需要说明的是,在子程序中,需要进行多次迭代求得应变硬化理论中的 t'_2 , 而相对时间硬化理论的 t_2 只需通过一次求解. 由于相对时间硬化理论和应变硬化理论的计算结果非常接近,因此,模拟实际结构的应力松弛效应时可选用相对时间硬化理论替代应变硬化理论,可在一定程序上节省计算时间,事实上,在精度方面也有所

chanical Engineers,2006:25-34.

[11] Omprakash C M,Kumar A,Srivathsa B,et al. Prediction of creep curves of high temperature alloys using θ -projection concept[J]. *Procedia Engineering*, 2013, 55 (1): 756-759.

[12] 马晓健. 短寿命发动机结构高温强度分析方法研究[D]. 南京:南京航空航天大学,2012.

[13] Miller A K. Modelling of cyclic plasticity with unified constitutive equations:improvements in simulating normal and anomalous Bauschinger effects[J]. *Journal of Engineering Materials and Technology*,1980,102(2):215-222.

[14] Chaboche J L. Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity[J]. *International Journal of Plasticity*,1989,5(3):247-302.

[15] Bodner S R,Partom Y. Constitutive equations for elastic-viscoplastic strain-hardening materials[J]. *Journal of Applied Mechanics*,1975,42(2):385-389.

[16] Eggeler G, Wiesner C. A numerical study of parameters controlling stress redistribution in circular notched specimens during creep[J]. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design*,1993,28(1):13-22.

[17] 王心美,姜云鹏,王亚芳,等. 圆棒拉伸试样蠕变过程中的应力应变分布分析[J]. *航空材料学报*, 2004, 24 (3): 58-62.

WANG Xinmei,JIANG Yunpeng,WANG Yafang,et al. A study of the creep stress and strain characteristics of smooth and notched bars[J]. *Journal of Aeronautical Materials*,2004,24(3):58-62. (in Chinese)

[18] 王勖成. 有限单元法[M]. 北京:清华大学出版社,2003.

(编辑:陈 越)